CORRIGÉ des fiches reproductibles

CHAPITRE 1 > Optimisation

RENFORCEMENT 1.1 — Inéquation du premier degré à deux variables

Page 187

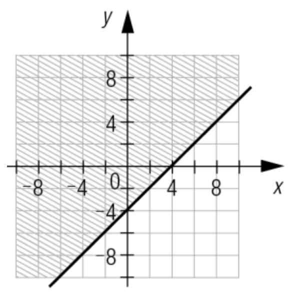
1. a) 1) x : revenus de la vente d'algicide cette année
y : revenus de la vente d'algicide l'an prochain

2) $y \leq x + 500\ 000$

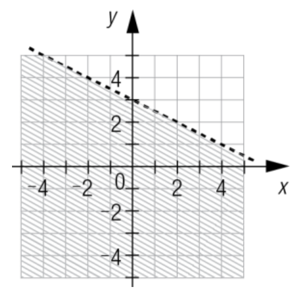
b) 1) x : nombre de contenants de 500 g
y : nombre de contenants de 1000 g

2) $10x + 18y \geq 3400$

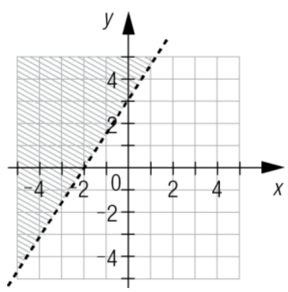
2. a)



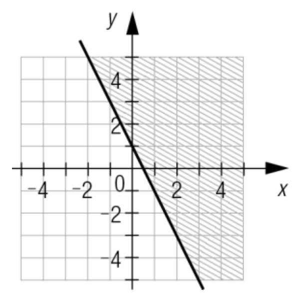
b)



c)



d)



Page 188

3. a) Pente : $a = \frac{7-3}{9-1} = 0{,}5$

$3 = 0{,}5 \times 1 + b$
$b = 2{,}5$

Équation de la droite frontière :
$y = 0{,}5x + 2{,}5$

Le point de coordonnées (0, 0) ne fait pas partie de l'ensemble-solution.

$0 \geq 0{,}5 \times 0 + 2{,}5$ est faux.

$y \geq 0{,}5x + 2{,}5$

b) Pente : $a = \frac{8-3}{2-6} = {}^{-}1{,}25$

$8 = {}^{-}1{,}25 \times 2 + b$
$b = 10{,}5$

Équation de la droite frontière :
$y = {}^{-}1{,}25x + 10{,}5$

Le point de coordonnées (0, 0) fait partie de l'ensemble-solution.

$0 < {}^{-}1{,}25 \times 0 + 10{,}5$ est vrai.

$y < {}^{-}1{,}25x + 10{,}5$

c) Pente : $a = \frac{-2-4}{-3-1} = 1{,}5$

$4 = 1{,}5 \times 1 + b$
$b = 2{,}5$

Équation de la droite frontière :
$y = 1{,}5x + 2{,}5$

Le point de coordonnées (0, 0) fait partie de l'ensemble-solution.

$0 < 1{,}5 \times 0 + 2{,}5$ est vrai.

$y < 1{,}5x + 2{,}5$

4. Variables

x : nombre de capsules de 0,15 mg
y : nombre de capsules de 0,25 mg

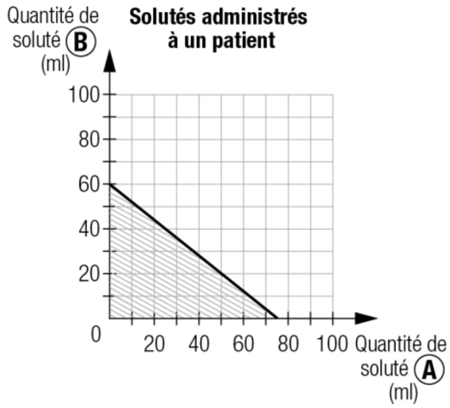
Inéquations

$0{,}15x + 0{,}25y \geq 0{,}4$
$0{,}15x + 0{,}25y \leq 1$

Réponse : Les inéquations associées à la situation sont $0{,}15x + 0{,}25y \geq 0{,}4$ et $0{,}15x + 0{,}25y \leq 1$.

5. a) $12x + 15y \leq 900$

b)



ENRICHISSEMENT 1.1 Inéquation du premier degré à deux variables

Page 189

1. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

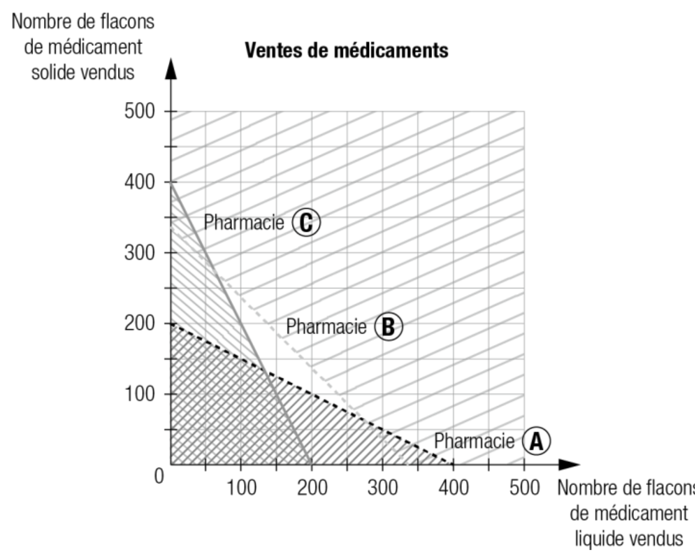
Variables
x : nombre de flacons de médicament liquide vendus
y : nombre de flacons de médicament solide vendus

Inéquations associées aux ventes

Pharmacie (A) : $10x + 20y < 4000$

Pharmacie (B) : $15x + 15y > 5000$

Pharmacie (C) : $20x + 10y \leq 4000$

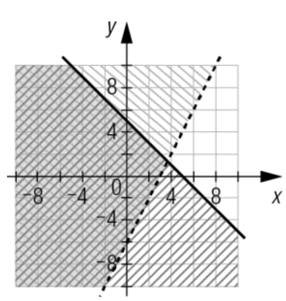


Réponse : En traçant les droites représentant les inéquations associées à la vente des médicaments pour chacune des pharmacies et en identifiant les régions-solutions pour chacune, on remarque qu'il n'y a pas d'ensemble-solution commun aux trois inéquations. C'est donc dire qu'il est impossible pour les trois pharmacies de vendre le même nombre de flacons de médicament.

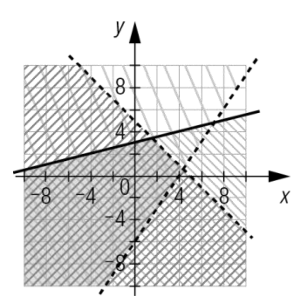
RENFORCEMENT 1.2 Système d'inéquations

Page 191

1. a)



b)



2. a) $y > 1{,}2x - 4$, $y \leq {}^{-}0{,}2x + 3$

b) $y > 0{,}8x - 7$, $y \geq {}^{-}0{,}25x - 4$, $y > {}^{-}2x - 10$

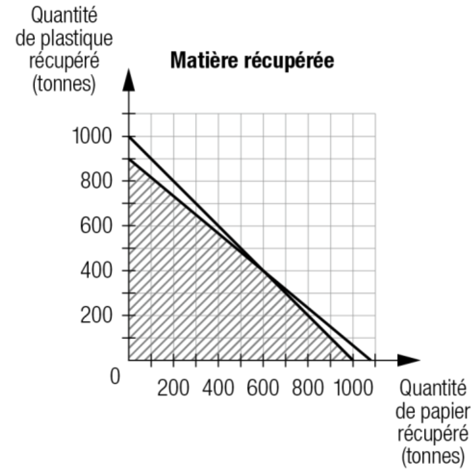
3. a) Oui. **b)** Non. **c)** Non. **d)** Non. **e)** Oui.

Page 192

4. **a)** x : quantité de papier récupéré (en tonnes)
y : quantité de plastique récupéré (en tonnes)

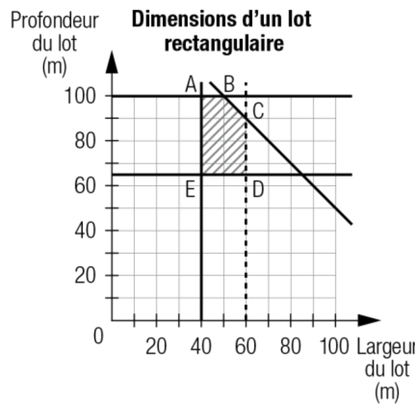
b) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 1000$
$125x + 150y \leq 135\ 000$

c)



5. Soit *x,* la largeur du lot (en m), et *y,* sa profondeur (en m).

Système d'inéquations :
$x \geq 40$
$x < 60$
$y \geq 65$
$y \leq 100$
$2x + 2y \leq 300$



Réponse : *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* 40 cm de largeur sur 90 cm de profondeur et 50 cm de largeur sur 80 cm de profondeur sont des dimensions possibles pour ce lot.

ENRICHISSEMENT 1.2 Système d'inéquations

Page 193

1. Déterminer les inéquations à l'aide des coordonnées d'un point appartenant à l'ensemble-solution, par exemple le point de coordonnées (8, 3).

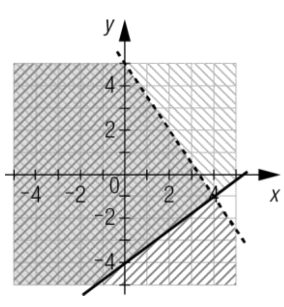
$x \geq 5$ $x < 12$	$3 \leq \sqrt{8 - 5} + 2{,}2$ $y \leq \sqrt{x - 5} + 2{,}2$	$3 > \sqrt{8 - 5} + 1$ $y > \sqrt{x - 5} + 1$

Réponse : $x \geq 5$, $x < 12$, $y \leq \sqrt{x - 5} + 2{,}2$, $y > \sqrt{x - 5} + 1$

RENFORCEMENT 1.3 Polygone de contraintes

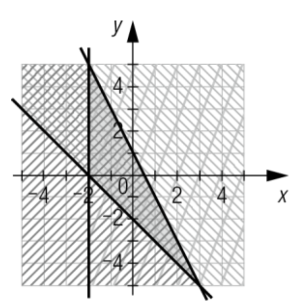
Page 195

1. **a)** **1)**



2) Le polygone est non borné.

b) **1)**



2) Le polygone est borné.

2. Coordonnées du sommet A :

$x + 3(9 - x) = 24$
$-2x + 27 = 24$
$x = 1{,}5$
$1{,}5 + 3y = 24$
$3y = 22{,}5$
$y = 7{,}5$
A(1,5, 7,5)

Coordonnées du sommet B :

$2x + 9 - x = 15$
$x = 6$
$2 \times 6 + y = 15$
$y = 3$
B(6, 3)

Coordonnées du sommet C :

$y = 0$
$2x + 0 = 15$
$x = 7{,}5$
C(7,5, 0)

Coordonnées du sommet D : D(0, 0)

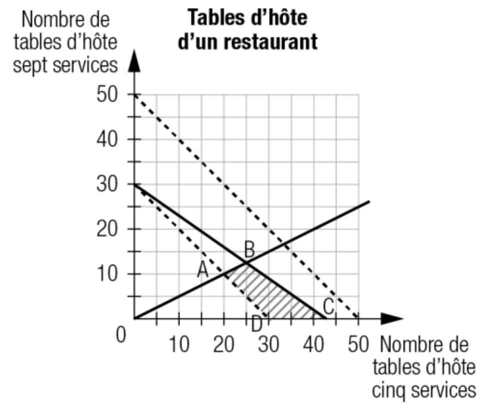
Coordonnées du sommet E : E(0, 8)

Page 196

3. a) $x + 5y < 13$, $x - y \leq 1$, $5x + y \geq {}^-7$

b) $y \leq {}^-0{,}8x + 14$, $y > x - 2$, $y > {}^-0{,}25x + 5{,}5$, $y \leq x + 3$

4. Soit x, le nombre de tables d'hôte cinq services, et y, le nombre de tables d'hôte sept services.



Système d'inéquations :

$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$
$x \geq 2y$ $\quad x + y > 30$
$x + y < 50$ $\quad 35x + 50y \leq 1500$

Coordonnées du sommet A :

$2y + y = 30$
$3y = 30$
$y = 10$
$x + 10 = 30$
$x = 20$
A(20, 10)

Coordonnées du sommet B :

$35(2y) + 50y = 1500$
$120y = 1500$
$y = 12{,}5$
$x = 2 \times 12{,}5$
$= 25$
B(25, 12,5)

Coordonnées du sommet C :

$y = 0$
$35x + 50(0) = 1500$
$x = \frac{300}{7}$
$C\left(\frac{300}{7}, 0\right)$

Coordonnées du sommet D :

$y = 0$
$x + 0 = 30$
$x = 30$
D(30, 0)

Réponse : Les coordonnées des sommets du polygone de contraintes sont A(20, 10), B(25, 12,5), $C\left(\frac{300}{7}, 0\right)$ et D(30, 0).

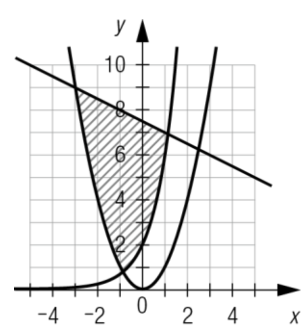
ENRICHISSEMENT 1.3 Polygone de contraintes

Page 197

1. Déterminer la région-solution de chaque inéquation à l'aide des coordonnées d'un point, par exemple le point de coordonnées (0, 5) :

$5 \geq 0^2$ est vrai.
$5 \geq 2 \times 3^0$ est vrai.
$0 + 2 \times 5 \leq 15$ est vrai.

La figure formée est fermée.



Page 201

1. a) 1)

Couple	$z = 4x - 5y$
A(3, 4)	$z = 4 \times 3 - 5 \times 4$ $= ^{-}8$
B(⁻4, 8)	$z = 4 \times {}^{-}4 - 5 \times 8$ $= ^{-}56$
C(2, ⁻2,2)	$z = 4 \times 2 - 5 \times {}^{-}2{,}2$ $= 19$
D(⁻1, ⁻1)	$z = 4 \times {}^{-}1 - 5 \times {}^{-}1$ $= 1$

2) Le couple C(2, ⁻2,2) permet de maximiser la fonction à optimiser.

b) 1)

Couple	$z = {}^{-}x + 3y - 1$
A(5, 1)	$z = {}^{-}5 + 3 \times 1 - 1$ $= ^{-}3$
B(⁻9, ⁻4)	$z = {}^{-}1 \times {}^{-}9 + 3 \times {}^{-}4 - 1$ $= ^{-}4$
C(⁻1,75, ⁻2)	$z = {}^{-}1 \times {}^{-}1{,}75 + 3 \times {}^{-}2 - 1$ $= ^{-}5{,}25$
D(7, 2,5)	$z = {}^{-}7 + 3 \times 2{,}5 - 1$ $= ^{-}0{,}5$

2) Le couple D(7, 2,5) permet de maximiser la fonction à optimiser.

2.

Sommet	a) $z = 4x + 3y$	b) $z = 3x - 2{,}5y$	c) $z = {}^{-}8x + 9y$
A(2, 6)	$z = 4 \times 2 + 3 \times 6$ $= 26$	$z = 3 \times 2 - 2{,}5 \times 6$ $= ^{-}9$	$z = {}^{-}8 \times 2 + 9 \times 6$ $= 38$
B(5, 9)	$z = 4 \times 5 + 3 \times 9$ $= 47$	$z = 3 \times 5 - 2{,}5 \times 9$ $= ^{-}7{,}5$	$z = {}^{-}8 \times 5 + 9 \times 9$ $= 41$
C(9, 5)	$z = 4 \times 9 + 3 \times 5$ $= 51$	$z = 3 \times 9 - 2{,}5 \times 5$ $= 14{,}5$	$z = {}^{-}8 \times 9 + 9 \times 5$ $= ^{-}27$
D(1, 2)	$z = 4 \times 1 + 3 \times 2$ $= 10$	$z = 3 \times 1 - 2{,}5 \times 2$ $= ^{-}2$	$z = {}^{-}8 \times 1 + 9 \times 2$ $= 10$

a) **1)** 10 **2)** 51

b) **1)** ⁻9 **2)** 14,5

c) **1)** ⁻27 **2)** 41

Page 202

3. Variables

x : nombre de serveurs
y : nombre de placiers

Objectif

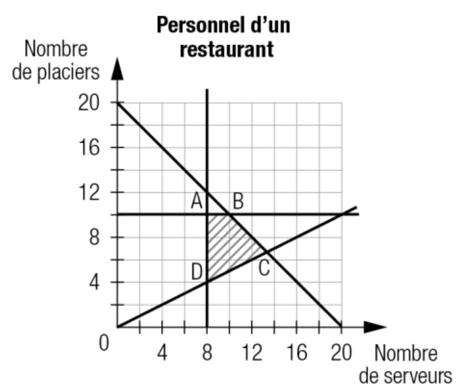
Minimiser les dépenses D (en $)

Règle de la fonction à optimiser

$D = 12x + 14y$

Contraintes

$y \geq 0$ $\quad x + y \leq 20$
$x \geq 8$ $\quad x \leq 2y$
$y \leq 10$



Coordonnées des sommets du polygone de contraintes

Coordonnées du sommet A : A(8, 10)

Coordonnées du sommet C :

$2y + y = 20$

$3y = 20$

$y = \frac{20}{3}$

$x = 2 \times \frac{20}{3}$

$= \frac{40}{3}$

$C\left(\frac{40}{3}, \frac{20}{3}\right)$

Coordonnées du sommet B :

$y = 10$

$x + 10 = 20$
$x = 10$

B(10, 10)

Coordonnées du sommet D :
$x = 8$

$8 = 2y$
$y = 4$

D(8, 4)

Solution optimale

Sommet	$D = 12x + 14y$
A(8, 10)	$D = 12 \times 8 + 14 \times 10$ $= 236$ \$
B(10, 10)	$D = 12 \times 10 + 14 \times 10$ $= 260$ \$
$C\left(\frac{40}{3}, \frac{20}{3}\right)$	$D = 12 \times \frac{40}{3} + 14 \times \frac{20}{3}$ $\approx 253{,}33$ \$
D(8, 4)	$D = 12 \times 8 + 14 \times 4$ $= 152$ \$

Les coordonnées du sommet D permettent de minimiser la fonction à optimiser.

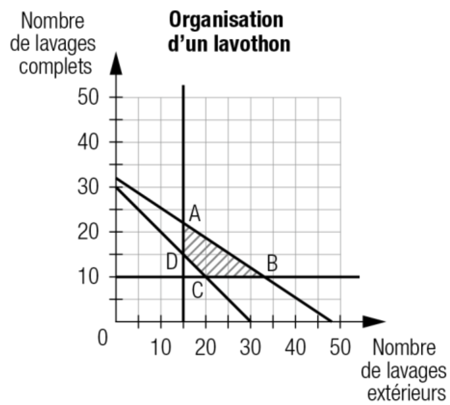
Réponse : La propriétaire devra engager huit serveurs et quatre placiers pour minimiser ses dépenses, qui s'élèveront à 152 \$.

ENRICHISSEMENT 1.4 Résolution de problèmes

Page 203

1. **Variables**

x : nombre de lavages extérieurs
y : nombre de lavages complets



Objectif

Maximiser les profits P (en \$)

Règle de la fonction à optimiser

$P = 15x + 25y$

Contraintes

$x \geq 15$
$y \geq 10$
$x + y \geq 30$
$10x + 15y \leq 480$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes

Coordonnées du sommet A :

$x = 15$

$10 \times 15 + 15y = 480$
$15y = 330$
$y = 22$

A(15, 22)

Coordonnées du sommet B :

$y = 10$

$10x + 15 \times 10 = 480$
$10x = 330$
$x = 33$

B(33, 10)

Coordonnées du sommet C :

$y = 10$

$x + 10 = 30$
$x = 20$

C(20, 10)

Coordonnées du sommet D :

$x = 15$

$15 + y = 30$
$y = 15$

D(15, 15)

Solution optimale

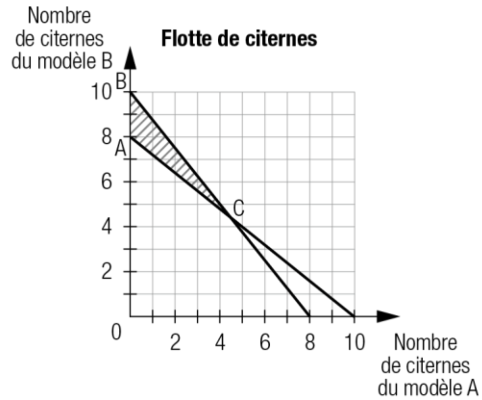
Sommet	$P = 15x + 25y$	Nombre de voitures lavées
A(15, 22)	$P = 15 \times 15 + 25 \times 22$ $= 775$ \$	$15 + 22 = 37$
B(33, 10)	$P = 15 \times 33 + 25 \times 10$ $= 745$ \$	$33 + 10 = 43$
C(20, 10)	$P = 15 \times 20 + 25 \times 10$ $= 550$ \$	$20 + 10 = 30$
D(15, 15)	$P = 15 \times 15 + 25 \times 15$ $= 600$ \$	$15 + 15 = 30$

Les coordonnées du sommet A permettent de maximiser la fonction à optimiser.

Réponse : Si l'équipe lave un maximum de voitures, soit 43, le profit sera de 745 \$, ce qui n'est pas le profit maximal. L'affirmation est donc fausse.

SP 1 Le transport laitier

Pages 204-205



Variables
x : nombre de citernes du modèle A
y : nombre de citernes du modèle B

Objectif
Minimiser les dépenses D liées à l'achat des citernes (en k$)

Règle de la fonction à optimiser
$D = 10x + 12y$

Contraintes
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$400x + 500y \geq 4000$
$2{,}5x + 2y \leq 20$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes

Coordonnées du sommet A :

$x = 0$

$400 \times 0 + 500y = 4000$
$y = 8$
A(0, 8)

Coordonnées du sommet B :

$x = 0$

$2{,}5 \times 0 + 2y = 20$
$y = 10$
B(0, 10)

Coordonnées du sommet C :

$400x + 500y = 4000$
$2{,}5x + 2y = 20$

$250(2{,}5x + 2y = 20) \Rightarrow 625x + 500y = 5000$

$$\begin{array}{r} 400x + 500y = 4000 \\ -\ (625x + 500y = 5000) \\ \hline {}^{-}225x \quad = {}^{-}1000 \\ x = \frac{40}{9} \end{array}$$

$2{,}5 \times \frac{40}{9} + 2y = 20$
$2y = \frac{80}{9}$
$y = \frac{40}{9}$

$C\left(\frac{40}{9}, \frac{40}{9}\right)$

Solution optimale

Sommet	$D = 10x + 12y$
A(0, 8)	$D = 10 \times 0 + 12 \times 8$ $= 96$ k$
B(0, 10)	$D = 10 \times 0 + 12 \times 10$ $= 120$ k$
$C\left(\frac{40}{9}, \frac{40}{9}\right)$	$D = 10 \times \frac{40}{9} + 12 \times \frac{40}{9}$ $\approx 97{,}78$ k$

Les coordonnées du sommet A permettent de minimiser la fonction à optimiser.

Réponse : L'entreprise doit acheter uniquement huit citernes du modèle B.

SR 1 La conception de bagues

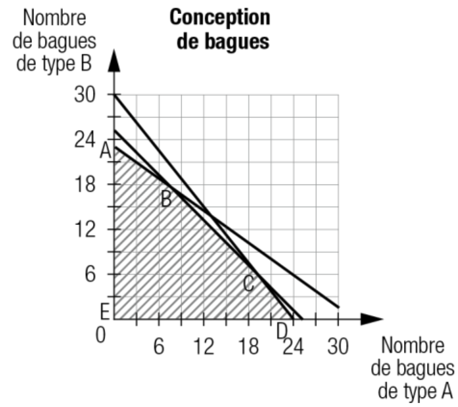
Pages 206-207

Variables
x : nombre de bagues de type A
y : nombre de bagues de type B

Objectif
Maximiser le nombre N de bagues produites

Règle de la fonction à optimiser
$N = x + y$

Contraintes
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$50x + 40y \leq 1200$
$25x + 35y \leq 805$
$25x + 25y \leq 625$



Coordonnées des sommets du polygone de contraintes

Coordonnées du sommet A :

$x = 0$

$25 \times 0 + 35y = 805$
$y = 23$

A(0, 23)

Coordonnées du sommet C :

$50x + 40y = 1200$
$25x + 25y = 625$

$2(25x + 25y = 625) \Rightarrow 50x + 50y = 1250$

$$\begin{array}{r} 50x + 40y = 1200 \\ -\ (50x + 50y = 1250) \\ \hline ^{-}10y = {}^{-}50 \\ y = 5 \end{array}$$

$50x + 40 \times 5 = 1200$
$50x = 1000$
$x = 20$

C(20, 5)

Coordonnées du sommet B :

$$\begin{array}{r} 25x + 35y = 805 \\ -\ (25x + 25y = 625) \\ \hline 10y = 180 \\ y = 18 \end{array}$$

$25x + 35 \times 18 = 805$
$25x = 175$
$x = 7$

B(7, 18)

Coordonnées du sommet D :

$y = 0$

$50x + 40 \times 0 = 1200$
$x = 24$

D(24, 0)

Coordonnées du sommet E : E(0, 0)

Solution optimale

Sommet	$N = x + y$
A(0, 23)	$N = 0 + 23$ $= 23$
B(7, 18)	$N = 7 + 18$ $= 25$
C(20, 5)	$N = 20 + 5$ $= 25$
D(24, 0)	$N = 24 + 0$ $= 24$
E(0, 0)	$N = 0 + 0$ $= 0$

Les coordonnées des sommets B et C permettent de maximiser le nombre de bagues produites, soit 25 bagues.

Vérifier la quantité de métal utilisée pour chaque possibilité :

	Cuivre $Q_{Cu} = 50x + 40y$	**Nickel** $Q_{Ni} = 25x + 35y$	**Argent** $Q_{Ag} = 25x + 25y$
B(7, 18)	$Q_{Cu} = 50 \times 7 + 40 \times 18$ $= 1070$ mg	$Q_{Ni} = 25 \times 7 + 35 \times 18$ $= 805$ mg	$Q_{Ag} = 25 \times 7 + 25 \times 18$ $= 625$ mg
C(20, 5)	$Q_{Cu} = 50 \times 20 + 40 \times 5$ $= 1200$ mg	$Q_{Ni} = 25 \times 20 + 35 \times 5$ $= 675$ mg	$Q_{Ag} = 25 \times 20 + 25 \times 5$ $= 625$ mg

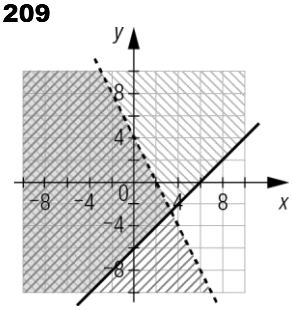
Réponse : En produisant sept bagues de type A et 18 bagues de type B, on n'utilise pas tout le cuivre disponible. En produisant 20 bagues de type A et 5 bagues de type B, on n'utilise pas tout le nickel disponible. Dans chaque cas, il est donc impossible d'utiliser tous les métaux disponibles.

Page 208

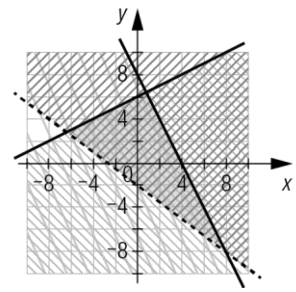
1. **c)** **2.** **d)** **3.** **c)** **4.** **a)** **5.** **b)**

Page 209

6. **a)**



b)



7. **a)**

Sommet	$M = 2x + 3y$
A(2, 6)	$M = 2 \times 2 + 3 \times 6$ $= 22$
B(7, 8)	$M = 2 \times 7 + 3 \times 8$ $= 38$
C(6, 2)	$M = 2 \times 6 + 3 \times 2$ $= 18$

1) 18

2) 38

b)

Sommet	$M = 4x - 3y$
A(1, 2)	$M = 4 \times 1 - 3 \times 2$ $= ^-2$
B(3, 7)	$M = 4 \times 3 - 3 \times 7$ $= ^-9$
C(9, 4)	$M = 4 \times 9 - 3 \times 4$ $= 24$
D(5, 0)	$M = 4 \times 5 - 3 \times 0$ $= 20$

1) $^-9$

2) 24

c)

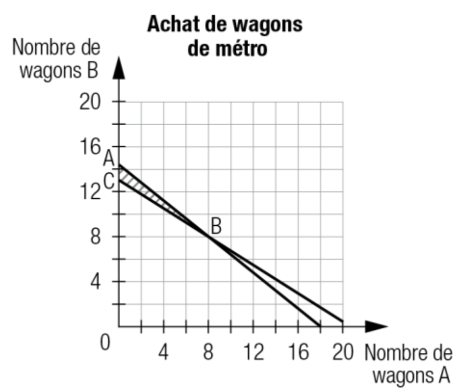
Sommet	$M = ^-2x - 4{,}5y$
A(0, 4)	$M = ^-2 \times 0 - 4{,}5 \times 4$ $= ^-18$
B(4, 9)	$M = ^-2 \times 4 - 4{,}5 \times 9$ $= ^-48{,}5$
C(9, 4)	$M = ^-2 \times 9 - 4{,}5 \times 4$ $= ^-36$
D(4, 0)	$M = ^-2 \times 4 - 4{,}5 \times 0$ $= ^-8$

1) $^-48{,}5$

2) $^-8$

Pages 210

8. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



Variables
x : nombre de wagons A
y : nombre de wagons B

Objectif
Minimiser les dépenses D relatives à l'achat des wagons (en M$)

Règle de la fonction à optimiser
$D = x + 1{,}25y$

Contraintes
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$25x + 40y \geq 520$
$x + 1{,}25y \leq 18$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes

Coordonnées du sommet A :

$x = 0$

$0 + 1{,}25y = 18$
$y = 14{,}4$

A(0, 14,4)

Coordonnées du sommet B :

$25(18 - 1{,}25y) + 40y = 520$
$450 - 31{,}25y + 40y = 520$
$8{,}75y = 70$
$y = 8$

$25x + 40 \times 8 = 520$
$25x = 200$
$x = 8$

B(8, 8)

Coordonnées du sommet C :

$x = 0$

$25 \times 0 + 40y = 520$
$y = 13$

C(0, 13)

Les couples dont les coordonnées sont entières et qui appartiennent au polygone de contraintes sont (0, 13), (0, 14), (1, 13), (2, 12), (3, 12), (4, 11), (5, 10) et (8, 8).

Couple	$D = x + 1{,}25y$
(0, 13)	16,25 M$
(0, 14)	17,5 M$
(1, 13)	17,25 M$
(2, 12)	17 M$
(3, 12)	18 M$
(4, 11)	17,75 M$
(5, 10)	17,5 M$
(8, 8)	18 M$

Parmi ces couples, le couple (0, 13) permet de minimiser les dépenses, pour un coût de 16,25 M$.

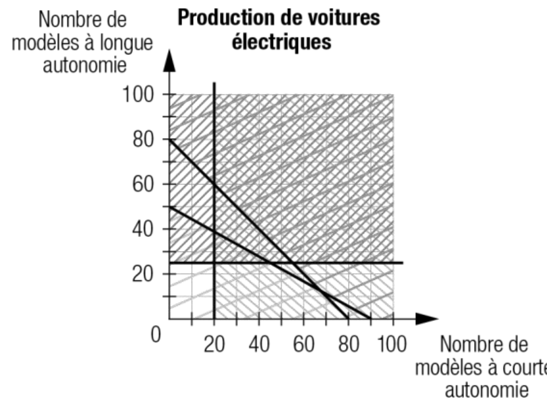
Réponse : Les dirigeants de la société de transport pourraient former des rames de métro comportant 13 wagons B.

9. Variables

x : nombre de modèles à courte autonomie
y : nombre de modèles à longue autonomie

Contraintes

$x \geq 20$
$y \geq 25$
$x + y \geq 80$
$25\,000x + 45\,000y \leq 2\,250\,000$



Réponse : La représentation graphique associée à ce système d'inéquations n'admet aucune région-solution. Il est donc impossible de respecter l'ensemble des contraintes liées à cette situation.