SAVOIRS 5.2 Espérance mathématique

ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

- Dans une expérience aléatoire, l'espérance mathématique correspond à la **somme des produits des valeurs** d'une variable aléatoire par leur **probabilité respective.** Autrement dit, l'espérance mathématique correspond à la **moyenne** des valeurs des variables aléatoires pondérée par la probabilité de chacune de ces valeurs.
- L'espérance mathématique, E_m, peut se calculer de cette façon.

$$E_m = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + \ldots + p_n \times r_n$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ correspond au nombre de valeurs possibles de la variable aléatoire, p_1, p_2, …, p_n correspondent aux probabilités respectives et r_1, r_2, …, r_n correspondent aux diverses valeurs possibles de la variable aléatoire.

- Pour déterminer l'espérance mathématique, on peut utiliser la démarche suivante.

Démarche	***Exemple :*** **Lors d'un transport, la probabilité que des articles soient abîmés est de 12 %, ce qui entraîne des pertes de 150 $ par article. De plus, la probabilité que des emballages soient déchirés est de 39 %, ce qui génère seulement 20 $ de profit par article. Les articles en bon état peuvent être vendus au plein prix, ce qui génère des profits de 55 $ par article. Quel profit l'entreprise peut-elle espérer avec un chargement de 1200 articles ?**
1. Déterminer le nombre de valeurs possibles, *n,* de la variable aléatoire selon le contexte.	Ici, $n = 3$, soit les articles abîmés, les articles dont l'emballage est déchiré et les articles en bon état.
2. Pour chaque variable identifiée à l'étape **1,** déterminer sa probabilité, *p,* et sa valeur, *r.*	$p_1 = 12\ \%$, $r_1 = {}^-150$ $p_2 = 39\ \%$, $r_2 = 20$ $p_3 = 100\ \% - (12\ \% + 39\ \%) = 49\ \%$, $r_3 = 55$
3. Calculer l'espérance mathématique, E_m.	$E_m = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$ $= 12\ \% \times {}^-150 + 39\ \% \times 20 + 49\ \% \times 55$ $= {}^-18 + 7{,}80 + 26{,}95$ $= 16{,}75$ $
4. Répondre à la question.	Dans ces conditions, l'entreprise peut **espérer** faire un profit moyen de 16,75 $ par article. Pour une production de 1200 articles, l'entreprise peut espérer faire un profit de $16{,}75 \times 1200 = 20\,100$ $.

ESPÉRANCE DE GAIN

- Dans le cas d'un jeu ayant une ou des **probabilités de gain** et une ou des **probabilités de perte,** l'espérance mathématique se nomme plus souvent espérance de gain, E_g, et peut se calculer de cette façon.

E_g = (1re probabilité de gagner) × (1er gain possible) + (2e probabilité de gagner) × (2e gain possible) + …
+ (1re probabilité de perdre) × (1re perte possible) + (2e probabilité de perdre) × (2e perte possible) + …

- Le gain possible correspond au **gain diminué de la mise initiale.**
- Dans la plupart des jeux de hasard, la perte correspond généralement à la mise initiale et est représentée par une valeur négative.

Exemple : Massimo débourse 2 $ pour jouer à un jeu. Il lance un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12 ; s'il obtient un multiple de 3, il gagne 5 $ et s'il obtient un 10 ou un 11, il gagne 3 $. Quelle est l'espérance de gain de ce jeu ?

$p_1 = P(\text{multiple de } 3) = \frac{4}{12}$, $r_1 = 5 - 2 = 3$

$p_2 = P(10 \text{ ou } 11) = P(10) + P(11) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$, $r_2 = 3 - 2 = 1$

$p_3 = 1 - \left(\frac{4}{12} + \frac{2}{12}\right) = \frac{6}{12}$, $r_3 = {}^-2$

$E_g = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$

$= \frac{4}{12} \times 3 + \frac{2}{12} \times 1 + \frac{6}{12} \times {}^-2 = \frac{12}{12} + \frac{2}{12} + \frac{{}^-12}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, soit $\approx$ 0,17 $.

L'espérance de gain de ce jeu est d'environ 0,17 $. Si Massimo joue un très grand nombre de fois, il peut espérer gagner en moyenne 0,17 $ chaque fois qu'il joue.

ÉQUITÉ

- Un jeu dont l'espérance mathématique (ou espérance de gain) est supérieure à 0 **avantage** les participants, tandis qu'un jeu dont l'espérance mathématique est inférieure à 0 **désavantage** les participants. Lorsque l'espérance mathématique d'un jeu est égale à 0, il est considéré comme **équitable.**

Exemple : Sandrine débourse 12 $ pour jouer à un jeu. Elle lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 ; si elle obtient un diviseur de 4, elle gagne 20 $, si elle obtient un 6, on lui remet sa mise, sinon, elle la perd. Ce jeu est-il équitable ?

$p_1 = P(\text{diviseur de } 4) = \frac{3}{6}$, $r_1 = 20 - 12 = 8$

$p_2 = P(6) = \frac{1}{6}$, $r_2 = 12 - 12 = 0$

$p_3 = 1 - \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6}$, $r_3 = {}^-12$

$E_g = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$

$= \frac{3}{6} \times 8 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{2}{6} \times {}^-12 = \frac{24}{6} + \frac{0}{6} + \frac{{}^-24}{6} = 0$

L'espérance de gain de ce jeu étant de 0 $, il est donc équitable.

- Pour déterminer la mise initiale d'une situation que l'on veut équitable, on peut utiliser la démarche suivante.

Démarche	***Exemple :*** **À un jeu de hasard, la probabilité de remporter 100 $ est de 10 % et celle de remporter 20 $ est de 20 %. Quelle devrait être la mise initiale si on veut que ce jeu soit équitable ?**
1. Assigner une variable à la mise initiale.	Soit x, la mise initiale.
2. Déterminer le nombre de valeurs possibles, n, de la variable aléatoire selon le contexte.	Ici, $n = 3$, soit remporter 100 $, remporter 20 $ ou perdre sa mise.
3. Pour chaque variable identifiée à l'étape **2,** déterminer sa probabilité, p, et sa valeur, r.	$p_1 = 10\ \%$, $r_1 = 100 - x$ $p_2 = 20\ \%$, $r_2 = 20 - x$ $p_3 = 100\ \% - (10\ \% + 20\ \%) = 70\ \%$, $r_3 = {}^-x$
4. Établir l'équation permettant de calculer l'espérance de gain, E_g.	$E_g = p_1 \times r_1 + p_2 \times r_2 + p_3 \times r_3$ $= 10\ \% \times (100 - x) + 20\ \% \times (20 - x) + 70\ \% \times {}^-x$
5. Résoudre l'équation en remplaçant la valeur de E_g par 0, puisque la situation doit être équitable.	$0 = 10\ \% \times (100 - x) + 20\ \% \times (20 - x) + 70\ \% \times {}^-x$ $0 = 10 - 0{,}1x + 4 - 0{,}2x - 0{,}7x$ $0 = 14 - x$ $x = 14$ $
6. Répondre à la question.	La mise initiale doit être de 14 $ pour que le jeu soit équitable.

RENFORCEMENT 5.2 Espérance mathématique

1 Calculez l'espérance mathématique de chaque distribution.

a) $\Omega = \{8, 12, 26, 30, 42\}$
$P(8) = 0{,}2$, $P(12) = 0{,}09$, $P(26) = 0{,}27$,
$P(30) = P(42) = 0{,}22$

b) $\Omega = \{101, 124, 133, 152, 164\}$
$P(101) = 0{,}18$, $P(124) = 0{,}19$,
$P(133) = 0{,}25$, $P(152) = 0{,}22$,
$P(164) = 0{,}16$

2 Déterminez la valeur de x dans chaque calcul d'espérance mathématique.

a) $78{,}75 = \frac{3}{8} \times 120 + \frac{5}{8} \times x$

b) $x = \frac{2}{7} \times 35 + \frac{4}{7} \times 28 + \frac{1}{7} \times {}^{-}49$

3 Dans chaque cas, déterminez si le jeu est équitable. Expliquez votre réponse.

a) On lance un dé à six faces. Si on obtient un multiple de 3, on gagne 8 $, sinon, on perd sa mise de 2 $.

Réponse :

b) Une urne contient deux billes rouges et 18 billes noires. Si on tire une bille rouge, on gagne 50 $, sinon, on perd sa mise de 5 $.

Réponse :

4 Afin de venir en aide à de jeunes sans-abris, on organise une loterie pour laquelle on vend 5000 billets au coût de 10 $ chacun. Neuf prix sont offerts : un lot de 3000 $, quatre lots de 2000 $ et quatre lots de 1000 $. Quelle est l'espérance de gain de cette loterie ?

Réponse :

5

5 Un jeu de hasard est constitué de trois événements A, B et C.

A : On gagne une somme de 24 $. B : On gagne une somme de 10 $. C : On perd sa mise.

Lorsqu'on gagne, on reçoit son gain et on récupère sa mise. Sachant que $P(\text{A}) = 0{,}15$, $P(\text{B}) = 0{,}25$ et que l'espérance de gain de ce jeu est de 1,30 $, déterminez la mise initiale de ce jeu.

Réponse : ____________________

6 Un jouet pour enfants comporte cinq ampoules.
À l'achat, la probabilité :

- qu'aucune ampoule ne soit défectueuse est de 0,95 ;
- qu'une ampoule soit défectueuse est de 0,03 ;
- que deux ampoules soient défectueuses est de 0,01 ;
- que trois ampoules soient défectueuses est de 0,005 ;
- que quatre ampoules soient défectueuses est de 0,003 ;
- que toutes les ampoules soient défectueuses est de 0,002.

Quel est le nombre moyen d'ampoules défectueuses à l'achat de ce jouet ?

Réponse : ____________________

7 Un jeu de hasard consiste à miser 10 $ et à lancer un dé équilibré à 10 faces. Si on obtient un multiple de 2, on gagne 12 $. Si on obtient 7, on gagne 20 $. Dans tous les autres cas, on perd sa mise.

a) Quelle est l'espérance de gain de ce jeu ?

Réponse : ____________________

b) Que signifie le résultat obtenu en **a)** ?

____

____

ENRICHISSEMENT 5.2 Espérance mathématique

1 Un jeu de hasard consiste à faire tourner une roue divisée en quatre secteurs. Le gagnant ou la gagnante se voit remettre la valeur du prix plus sa mise initiale. Voici des renseignements sur ce jeu.

Fonctionnement d'un jeu

Secteur	Mesure de l'angle au centre	Valeur du prix
A	60°	Six fois la valeur de la mise initiale
B	50 % de plus que la mesure de l'angle au centre du secteur A	La moitié de la valeur du prix associé au secteur A
C	30° de plus que la mesure de l'angle au centre du secteur A	La moitié de la valeur du prix associé au secteur B
D	Somme des mesures des angles au centre des secteurs B et C, diminuée de la mesure de l'angle au centre du secteur A	Perte de la mise initiale
Espérance de gain de ce jeu : 32,25 $		

Quelle est la valeur du prix associé au secteur A ?

Réponse : ______